Becker und Zermelo*

Volker Peckhaus
Universität Paderborn
Fakultät für Kulturwissenschaften – Philosophie
Warburger Str. 100, D – 33098 Paderborn
E-mail: peckhaus@hrz.upb.de

1 Einleitung

Dieser Beitrag will nicht mehr als eine Miszelle zur Philosophie der Mathematik Oskar Beckers sein. Er spürt den Beziehungen zwischen Becker und seinem berühmten, in Freiburg aber ungeliebten Mathematiker-Kollegen Ernst Zermelo nach, dem Mengentheoretiker und Grundlagenforscher. Diese Beziehungen, die durch gemeinsame mathematikphilosophische Interessen und die gemeinsame Zeit an der Universität Freiburg befördert wurden, sollen auf Grund der Publikationen Beckers und an Hand von Materialien aus dem Nachlaß Zermelos rekonstruiert werden. Es wird insbesondere ein Brief Beckers an Zermelo publiziert, in dem Becker Stellung nimmt zu Zermelos Theorie infiniter Mengenhierarchien. Die Kontextualisierung dieses Briefes läßt es sinnvoll erscheinen, einen genaueren Blick auf Leben und Werk Zermelos zu werfen,[1] auch wenn sich dabei eine Asymmetrie der Darstellung ergibt, die im Rahmen dieser Publikationsreihe zu Oskar Becker vielleicht verzeihbar ist.

2 Vorspiel: Hilberts Brief an Becker

Im Nachlaß David Hilberts in Göttingen findet sich der Entwurf eines Briefes, den Hilbert möglicherweise im Herbst des Jahres 1930 an Oskar Becker

*Ich danke Heinz-Dieter Ebbinghaus (Freiburg i. Br.), Christian Thiel (Erlangen), Johannes Emrich (Erlangen) und Marcello Ghin (Paderborn) für Korrekturen und hilfreiche Hinweise.

[1]Die Zermelo-Forschungen sind Gegenstand eines DFG-Projektes „Wissenschaftliche Biographie von Ernst Zermelo (1871–1953)“, das ich zusammen mit Heinz-Dieter Ebbinghaus (Freiburg i. Br.) durchführe.

geschickt hat.[2] Hilbert befand sich damals im Ostseebad Rauschen, und er ergriff die Gelegenheit, Beckers Werk *Mathematische Existenz*, das ja schon drei Jahre vorher erschienen war (Becker *1927*), zu kommentieren. Dieser Kommentar mußte unter erschwerten Bedingungen erfolgen, denn:

> Nun liegt mir hier Ihr Buch nicht vor, überhaupt keinerlei Material. Trotzdem möchte ich Ihnen von hier aus einige Bemerkungen dazu machen, da ich in Göttingen sonst vielleicht garnicht dazu komme.

Leider ist der Brief nicht vollständig überliefert, die zweite Seite des Konzeptes fehlt. Es ist aber offensichtlich, daß Hilbert in höchster Erregung insbesondere die Beckersche Ablehnung seiner Widerspruchsfreiheitsbeweise für das Programm einer Grundlegung der Mathematik kritisierte. Auf der dritten Seite führt er gegen die Kritik an dem, was Becker „Hilberts Formalismus" genannt hatte, die Verläßlichkeit der Mathematik und ihren Erfolg in Anwendungen ins Feld. Wenn denn schon Becker an der formalistischen Mathematik zweifele, müsse er auch zu folgendem stehen:

> Also heraus mit dem Flederwisch, zeigen Sie mit der transfiniten Schlussweise, dass $2 > 7$ oder $3 \cdot 4 = 8$ ist! Und wenn wir erst an alle die Anwendungen denken! Haben Sie sich klar gemacht, was für eine Fülle von Mannigfaltigkeiten in transfiniten Schlüssen und Rechnungen der schwierigsten und mühsamsten Art z. B. in der Relativitätstheorie und ebenso in der Quantentheorie stecken, und die Natur richtet sich doch genau nach diesen Ergebnissen. Der Fixsternstrahl, der Merkur und die verwickeltsten Spektren hier auf Erden und in der Ferne von 100 000 Lichtjahren? Und das soll alles Zufall sein?

Charakterisiert man, wie ich dies getan habe (Peckhaus *in diesem Bd.*), Hilberts Philosophie der Mathematik, wie sie in seiner Metamathematik formuliert ist, als nicht-realistische, dem Konstruktivismus ähnliche Position, und seine synthetisch-dogmatische Axiomatik, die gerne mit dem Formalismus identifiziert wird, gar als erkenntnistheoretisch neutral, so bereitet diese Stelle natürlich einige interpretative Schwierigkeiten. Denn wenn hier von Hilbert behauptet wird, daß sich die Natur genau nach den Ergebnissen transfiniter Mathematik richte, so scheint ein Realismus anzuklingen. Wir sollten jedoch festhalten: Hilbert war kein Philosoph und sollte daher auch nur mit Vorbehalten beim philosophischen Wort genommen werden. Ich halte Hilberts hier zitierte Überlegungen also für philosophisch naive (allerdings an Kant gemahnende) Positionsbestimmungen bezüglich eines großen, bis heute nicht für alle Seiten befriedigend gelösten Problems in der Philosophie der Mathematik: des Anwendungsproblems.[3]

[2] Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung [SUB Göttingen] Cod. Ms. D. Hilbert 457.

[3] Vgl. zum Anwendungsproblem in der Mathematik Thiel *1995*, 30–48.

Die Vorwürfe, auf die Hilbert hier Bezug nimmt, werden offenbar auf der zweiten Seite des Briefes referiert, die uns leider nicht mehr vorliegt. Es kann aber vermutet werden, daß sich Hilbert dort über die gängige Charakterisierung des Formalismus als bloßes Zeichenspiel geärgert hat. Bei einer solchen Charakterisierung wird, wie ich denke, die alte Kritik Freges an der formalen Arithmetik Thomaes und anderer gedankenlos auf die Hilbertsche Mathematik übertragen (vgl. Peckhaus *1997*). So hat auch Becker diese Charakterisierung des Formalismus in durchaus vorwurfsvollem Ton gegen Hilberts axiomatisches Programm gewendet. Er spricht in der *Mathematischen Existenz* vom „mathematischen Formelspiel" (Becker *1927*, 35), vom „Deduktionsspiel" (316), vom „formal-mathematischen Spiel" (323) und mit Bezug auf Gauss vom „inhaltsleeren Zeichenspiel" (41).

Obwohl Becker nicht der einzige ist, der den Formalismus auf diese Weise beschrieben hat, ist Hilberts Erregung verständlich, denn die Spielmetapher paßt nicht auf Hilberts spezifische Variante einer axiomatischen Grundlegung der Mathematik. Hilbert spielt zwar mit seinen Axiomen, um herauszufinden, wie sich die Mathematik eines bestimmten Gebietes bei Variation der axiomatischen Basis ändert. Im wesentlichen dient die Axiomatisierung aber der Rekonstruktion bestehender Mathematik. Damit ist sie natürlich in ihren Spielräumen pragmatisch eingeschränkt. Die Art der Axiomatisierung ist zudem durch Problemstellungen bestimmt, die sich in Anwendungen der Mathematik ergeben haben. Die axiomatisierte Mathematik erfüllt für Hilbert also auch eine Dienstleistungsfunktion, die mit einem reinen Zeichenspiel sicherlich nicht zu bewältigen wäre.

Die Vermutung, daß sich Hilberts Kritik gegen die Spielmetapher richtet, wird durch Beckers Antwortbrief vom 4. Oktober 1930 unterstützt.[4] Becker betont darin, daß es keineswegs seine Absicht gewesen sei, den hohen Wert der Beweistheorie anzugreifen oder die mittels transfiniter Schlußweisen gewonnenen Ergebnisse der formalen Mathematik zu „bezweifeln". Er habe lediglich den Unterschied zwischen der „philosophischen" inhaltlichen Wahrheit der Meta-Mathematik und der bloßen Richtigkeit der formalen Mathematik näher interpretiert. Er fährt dann fort:

> Wenn ich dabei die formale Mathematik als ein Spiel bezeichnet habe, so ist das ja auch oft von den Mathematikern selbst gesagt worden, es ist z. B. ausgesprochen Zermelos Standpunkt.

Es erscheint mir sicher, daß dieses auf Konventionen und Autoritäten gestützte Argument Hilbert in dieser ja doch systematischen Frage nicht hat überzeugen können. Bezüglich des faktischen Erfolgs der Mathematik in Anwendungen gibt Becker zu (allerdings mit einer durchaus angebrachten Distanzierung):

[4] SUB Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 457.

> Das Problem der Anwendung der formalen Mathematik auf die Physik ist in *philosophischer* Hinsicht m. E. sehr schwierig, die Tatsache der Anwendbarkeit zu „bezweifeln“, wäre Wahnsinn.

Der Name „Zermelo“ ist gefallen. Dem Mengentheoretiker Ernst Zermelo wird der „ausgesprochene“ Standpunkt zugeschrieben (für den es allerdings weder im Zermeloschen Nachlaß noch in seinen Veröffentlichungen einen Beleg gibt), daß formale Mathematik ein Spiel sei. Zermelo wird aber noch an anderer Stelle des Briefes genannt. Hilbert hatte sich, nachdem er die Anwendungen formaler Mathematik aufgelistet hatte, zu einem persönlichen Angriff gegen Becker hinreißen lassen:

> Und bei der Sachlage sollten wir wegen der schönen Augen einiger als Mathematiker verkleidete[r] Philosophen aus philosophischen Gründen, die noch dazu völlig willkürlich und garnicht einmal präzise formulierbar sind, auch nur einen Augenblick uns besinnen und wanken!

Becker sieht sich in seinem Antwortschreiben zur Reaktion genötigt. Er weist auf seine mathematische Qualifikation hin:

> Allerdings bin ich dem wirklichen mathematischen Betrieb doch nicht so ganz fern, wie Sie zu glauben scheinen. Ich habe seinerzeit 12 Semester Mathematik (bei Hölder und Herglotz in Leipzig) studiert und dann in diesem Fach promoviert, mit einer axiomatischen Arbeit (1914). Nach 4 Jahren Kriegsdienst habe ich mich dann der Philosophie zugewandt und mich 1922 bei Husserl hier [in Freiburg] habilitiert. Auch noch in den letzten Jahren habe ich mit Mathematikern brieflich und mündlich viel verkehrt, auch mit Herren aus Ihrem engeren Kreise (W. Ackermann und J. v. Neumann), ferner mit H. Weyl, und hier [in Freiburg] natürlich oft mit E. Zermelo, in dessen Seminar ich sogar über die Probleme aus der Theorie der transfiniten Ordnungszahlen mehrfach Vorträge gehalten habe.

Hilbert hat übrigens die Polemik gegen Becker später in einen Vortrag eingebaut, den er im Dezember 1930 auf Einladung der Philosophischen Gesellschaft in Hamburg gehalten hat. In diesem Vortrag „Die Grundlagen der elementaren Zahlenlehre“ heißt es im Rahmen von Überlegungen zur prästabilierten Harmonie zwischen Natur und Denken über die Anwendung transfiniter Schlußweisen (Hilbert *1931*, 387*f.*):

> Endlich, wenn wir erst an alle Anwendungen denken und uns klarmachen, was für eine Fülle von transfiniten Schlüssen der schwierigsten und mühsamsten Art z. B. in der Relativitätstheorie und Quantentheorie steckt, und wie sich doch die Natur genau nach diesen Ergebnissen richtet: der Fixsternstrahl, der Merkur und die kompliziertesten Spektren hier auf Erden und in der Ferne von hunderttausenden

> Lichtjahren; sollten wir bei dieser Sachlage wegen der schönen Augen Kroneckers und einiger als Mathematiker verkleideter Philosophen aus Gründen, die noch dazu völlig willkürlich und gar nicht einmal präzise formulierbar sind, auch nur einen Augenblick an der Berechtigung der Anwendung des Tertium non datur zweifeln?

3 Ernst Zermelo

3.1 Biographische Skizze

Zermelo wurde am 27. Juli 1871 in Berlin geboren.[5] Er studierte Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, Halle, Freiburg i. Br. und schließlich wieder Berlin, wo er nach dem Staatsexamen[6] als erster Doktorand von Hermann Amandus Schwarz *1894* mit der Dissertation *Untersuchungen zur Variationsrechnung* promovierte. Von 1894–1897 war er Assistent von Max Planck am Institut für theoretische Physik in Berlin.

1897 ging er nach Göttingen, habilitierte sich 1899 für Mathematik und lehrte dort anschließend als Privatdozent, finanziert durch ein Privatdozentenstipendium. 1905 wurde er zum Titularprofessor ernannt. Als sein Stipendium auslief und nicht mehr verlängert werden konnte, erhielt er 1908 mit Hilberts Unterstützung einen besoldeten Lehrauftrag für Mathematische Logik und verwandte Gegenstände, den ersten Lehrauftrag, der für dieses Fach in Deutschland vergeben wurde.[7] Schon in dieser Zeit erkrankte Zermelo an Tuberkulose, eine Krankheit, die er durch lange Aufenthalte in Sanatorien in der Schweiz zu kurieren versuchte.

Im Frühjahr 1910 beantragte die Philosophische Fakultät der Universität Göttingen, Zermelo zum Extraordinarius zu ernennen.[8] Dieser Antrag wurde jedoch hinfällig, weil Zermelo als ordentlicher Professor für Mathematik an die Universität Zürich berufen wurde.[9] Aber schon im Januar 1911 mußte er

[5]Vgl. zu Biographie und Werk unter Schwerpunktsetzung auf die Göttinger Zeit Zermelos Kapitel 4 meines Buches *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie* (Peckhaus *1990a*) sowie meinen Aufsatz „ ‚Ich habe mich wohl gehütet, alle Patronen auf einmal zu verschießen‘ “ (*1990b*).

[6]Zermelo wurde am 2. Februar 1897 durch das Oberlehrerzeugnis „die wissenschaftliche Befähigung zuerkannt, neben der *philosophischen Propädeutik*, *Mathematik*, *Physik*, *Geographie*, *Mineralogie* in *allen*, *Chemie* in den *mittleren Klassen* einer höheren Schule zu lehren“, Nachlaß Zermelo, Bestand Institut für Mathematische Logik, Universität Freiburg i. Br.

[7]Von der im Sommersemester 1908 gehaltenen Vorlesung „Mathematische Logik“ liegt im Nachlaß Zermelos eine von Kurt Grelling erstellte Ausarbeitung vor (Zermelo *1908b*). Vgl. auch Peckhaus *1992*.

[8]SUB Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 492.

[9]Zermelos Zeit in Zürich ist Gegenstand meines online publizierten Textes „Zermelo in Zürich“ (Peckhaus *1997/2001*). Dort auch die archivalischen Belege.

sich krankheitsbedingt für ein Jahr beurlauben lassen. Im März 1914 wurde eine Kaverne im Oberlappen des rechten Lungenflügels durch eine Parafinplombe verkleinert. Die Operation wurde von Ferdinand Sauerbruch, dem damals in Zürich wirkenden Pionier der Brustkorbchirurgie, durchgeführt. 1915 mußte sich Zermelo einer weiteren Operation unterziehen. Eine tuberkulöse Stimmband-Veränderung hatte es ihm unmöglich gemacht zu lehren. Die Vertretung übernahm übrigens Paul Bernays, der sich 1912 bei Zermelo in Zürich habilitiert hatte. Nachdem im Frühjahr 1916 nicht absehbar war, ob er im bevorstehenden Sommersemester werde lesen können, reichte Zermelo dem Willen des Hochschulrates der Erziehungskommission entsprechend seinen Abschied ein, so daß die ohnehin zunächst auf sechs Jahre erfolgte Berufung nicht verlängert wurde. Diese sechs Jahre an der Universität Zürich waren die einzige Zeit seines Lebens, in der Zermelo eine feste, bezahlte Stelle innehatte. Er sollte fortan vor allem von seiner Zürcher Pension leben.

1921 zog Zermelo nach Freiburg i. Br. um, wo er offenbar Kontakte zu den Freiburger Mathematikern aufnahm. 1926 wurde er auf Initiative von Lothar Heffter und Alfred Loewy zum ordentlichen Honorarprofessor für Mathematik an der Universität Freiburg i. Br. ernannt. 1935 wurde er denunziert, er erweise den „Deutschen Gruß“ nicht oder nur nachlässig und schädige so das Ansehen der Freiburger Dozenten- und Studentenschaft. Der Einleitung eines Verfahrens zum Entzug seiner *venia legendi* kam Zermelo durch den Verzicht auf eine weitere Lehrtätigkeit zuvor.[10]

In einem Kondolenzbrief an Zermelos Witwe Gertrud bezeichnet Paul Bernays Zermelo als markante und originelle Forscherpersönlichkeit. Gerade während seiner Freiburger Zeit hat er tiefe freundschaftliche Beziehungen z. B. zum Mathematiker Arnold Scholz unterhalten, der nach Kiel ging und dort wegen seiner politischen Indifferenz in das Schußfeld nationalsozialistischer Studentenvertreter geriet, aber auch zu Marvin Farber, dem Phänomenologen, der 1927 an die State University of New York at Buffalo gegangen war. Zermelo übte auch einen nachhaltigen Einfluß auf einige seiner Studenten aus. Dazu gehörte z. B. in Göttingen der im Dritten Reich ermordete Kurt Grelling (vgl. Peckhaus *1993*, *1994*), in Freiburg Gottfried Martin, der 1934 bei Zermelo Vorlesungen und Übungen über Mengenlehre gehört hatte,[11] gelegentlich mit ihm korrespondierte und sich nach Zermelos Tod zusammen mit Helmuth Gericke um den Erwerb des Nachlasses und eine Edition der Schriften Zermelos bemühte.

Zermelo als markante Persönlichkeit hatte aber auch seine Kanten. Polemische Kontroversen haben nach dem Urteil Gregory Moores (*1982*, 159)

[10] Der Vorgang ist in der Freiburger Personalakte Zermelos dokumentiert, UA Freiburg, B 24/4259.

[11] Siehe den undatierten Brief Martins (nach 1940), Universitätsarchiv Freiburg i. Br., Nachlaß Zermelo [UA Freiburg], C 129/73.

Zermelo stets zu den größten Anstrengungen angespornt. Diese Polemiken waren oft auch persönlich gefärbt, und seine Eigenheiten, so Gericke (*1955*, 73), stießen „selbst seine Freunde manchmal vor den Kopf". Gerickes Bemerkung zeigt, daß Zermelo wohl auch in Freiburg nicht nur Freunde hatte. Da er sich zudem nicht auf einer Wellenlänge mit dem neuen nationalsozialistischen Zeitgeist bewegte (hierin unterschied er sich von Becker), kam es wohl insbesondere zu Konflikten mit Lothar Heffters Nachfolger Gustav Doetsch, dem nationalsozialistischen Hardliner unter den Freiburger Mathematikern, der, wie sich Arnold Scholz gegenüber Zermelo ausdrückte,[12] „die Wissenschaft terrorisiert". Die Denunziation durch den Doetschschen Assistenten Eugen Schlotter führte letztendlich zur Entlassung Zermelos.[13]

1946 bekundete Zermelo die Bereitschaft, seine Tätigkeit als Honorarprofessor unter den geänderten politischen Bedingungen wieder aufzunehmen. Er wurde rehabilitiert,[14] von seinen Lehraufgaben aber unter Rücksicht auf sein fortgeschrittenes Alter, seine schwere Erkrankung und seine zunehmende Erblindung entbunden. Zermelo starb am 21. Mai 1953 in Freiburg.

3.2 Zum Werk Zermelos

Die ersten wissenschaftlichen Veröffentlichungen Zermelos gehören in den Bereich der angewandten Mathematik. Er arbeitete zur Variationsrechnung und zu Anwendungen der Mathematik in der Kinetischen Gastheorie. Schon 1896 wurde er weithin bekannt durch eine polemische Auseinandersetzung mit Ludwig Boltzmann um den sogenannten Wiederkehreinwand zur Kinetischen Gastheorie (vgl. Zermelo *1896a, b*).

1897 wechselte er von Berlin nach Göttingen, um sich in einer kleineren Stadt auf eine spätere Habilitation in theoretischer Physik, Mechanik oder einem anderen Fach vorzubereiten, wie er an Felix Klein schrieb.[15]

Nach dem Pariser Vortrag David Hilberts über „Mathematische Probleme" im Jahr 1900 (Hilbert *1900*) geriet Zermelo unter dessen Einfluß. Er konzentrierte seine Arbeiten zunehmend auf die Mengenlehre und damit auf Arbeiten, die im Zusammenhang mit dem Cantorschen Problem, die Mächtigkeit des Kontinuums zu bestimmen, standen, das Hilbert seinen Pariser Zuhörern als erstes Problem für die Mathematik des neuen Jahrhunderts präsentiert hatte. Seinen Ruf als Mengentheoretiker begründete er vor allem durch drei Arbeiten, die zugleich dazu beitrugen, Göttingen zum

[12] Arnold Scholz an Zermelo, dat. Kiel 9.2.1935, UA Freiburg, C 129/104. Zu Doetsch und seiner nationalsozialistischen Verstrickung vgl. Remmert *1999*.

[13] Vgl. die Akten im UA Freiburg, Personalakte Zermelo, B 24/4259.

[14] Die Wiedereinsetzungsurkunde datiert von 23.7.1946, UA Freiburg, Fakultätsakten, B 15/736.

[15] Zermelo an Klein, dat. Berlin 19.7.1897, SUB Göttingen, Cod. Ms. F. Klein, 12.433A.

Weltzentrum für mathematische Grundlagenforschung zu machen. Es handelt sich um die *1904* veröffentlichte Schrift „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann" (Zermelo *1904*), die deshalb so kontrovers diskutiert wurde, weil der Beweis des Wohlordnungssatzes mit Hilfe des umstrittenen Auswahlaxioms geführt worden war;[16] und die beiden 1908 veröffentlichten Aufsätze „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung" (*1908a*) und „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I" (*1908b*). In der erstgenannten Arbeit setzte er sich im zweiten Teil in scharfer Form mit den Kritikern seines ersten Beweises auseinander, die zweite Arbeit enthält die berühmte erste Axiomatisierung der Mengenlehre im Geiste des axiomatischen Programms seines Göttinger Lehrers David Hilbert. Zermelo wurde damit sozusagen zu einem ersten Mitglied der Hilbertschen Schule der Grundlagenforschung, zu einer Zeit, als diese Schule noch gar nicht existierte.

Zermelos Konzentration auf die Mengenlehre war aber nie vollständig. Er arbeitete weiterhin in der Variationsrechnung, und als ihn Bertrand Russell 1912 bat, auf dem fünften internationalen Mathematiker-Kongreß in Cambridge über das Auswahlaxiom zu sprechen, erklärte er, daß er es vorziehen würde, über die Theorie des Schachspiels vorzutragen.[17] Mit der dort präsentierten Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels (Zermelo *1913*) wurde er zu einem der Begründer der Spieltheorie.

Zwischen 1914 und 1927 finden wir keine Publikation von Zermelo. Abraham A. Fraenkel spekuliert in seinen Erinnerungen über die Gründe: „Als ich Zermelos Freund Erhard Schmidt gelegentlich fragte, warum denn Zermelo fast aufgehört habe zu publizieren, erwiderte er, weil er mit seinen Veröffentlichungen niemand mehr zu ärgern erwarten könne" (Fraenkel *1967*, 149, Anm. 55). Sicherlich war die Kontroverse ein wichtiger Motor für Zermelos Schaffen, ausschlaggebend für sein Schweigen dürften aber Krankheit und zunehmende wissenschaftliche Isolation nach Ende der Zürcher Professur gewesen sein.

Mit der Übersiedlung nach Freiburg und der Berufung auf die Honorarprofessur für Mathematik in Freiburg hatte es mit der Isolation ein Ende. Zermelo begann wieder rege zu publizieren, zusätzlich unterstützt und motiviert durch ein Stipendium, das ihm von der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft zur Erforschung von „Wesen und Grundlagen der reinen und angewandten Mathematik, die Bedeutung des Unendlichen in der Mathematik" gewährt wurde.[18] Zermelo erhielt dieses Stipendium in den Jahren 1929 bis 1931. Ergebnis dieser Forschungen sind seine grundlegenden Arbeiten über kumulative Mengenhierarchien und infinitäre Sprachen. Über seine

[16] Zur Geschichte dieses Satzes vgl. vor allem Moore *1982*.

[17] Vgl. die Briefe Russells vom 16.3.1912 und 8.4.1912, UA Freiburg, C 129/99.

[18] Vgl. UA Freiburg, C 129/40. Zermelos Bericht an die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft wurde von Gregory H. Moore veröffentlicht (Moore *1980*, 130–134).

Motivation zu diesen Forschungen schreibt Zermelo in seinem Bericht an die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft:

> Mittlerweile war aber auch die Frage nach den „Grundlagen“ aufs Neue wieder in Fluß gekommen durch das etwas geräuschvolle Auftreten der „Intuitionisten“, die in temperamentvollen Streitschriften eine „Grundlagen-Krisis“ der Mathematik verkündeten und so ziemlich der ganzen modernen Wissenschaft den Krieg erklärten — ohne selbst etwas Besseres an ihre Stellen setzen zu können. „Eine Mengenlehre als besondere mathematische Disziplin wird es nicht mehr geben“ dekretierte einer ihrer eifrigsten Adepten — während gleichzeitig die neuen Lehrbücher der Mengenlehre nur so ins Kraut schossen. Diese Sachlage veranlaßte auch mich damals, den Grundlagen-Problemen wieder meine forschende Tätigkeit zuzuwenden, nachdem ich durch langwierige Krankheit und geistige Isolierung im Auslande der wissenschaftlichen Produktion schon fast entfremdet war. Ohne in dem proklamierten Streite zwischen „Intuitionismus“ und „Formalismus“ Parteigänger zu werden — ich halte diese Alternative überhaupt für eine logisch unzulässige Anwendung des „Tertium non datur“ — glaubte ich doch zu einer Klärung der einschlägigen Fragen beitragen zu können.[19]

Von großer motivierender Kraft war eine Vortragsreise nach Polen, auf der er seine Überlegungen zur Diskussion stellte.

Aber auch in jener Zeit arbeitete Zermelo nicht ausschließlich in der Mengenlehre: Daß er 1930 eine auch von Fachleuten gelobte Übersetzung aus Homers Odyssee (Zermelo *1930c*) vorlegte, sei hier nur am Rande erwähnt. Wichtiger ist, daß er sich auch wieder der Variationsrechnung und damit Anwendungen der Mathematik widmete. Eine der großen Errungenschaften war die Anwendung der Variationsrechnung auf Probleme der Navigation von Luftfahrzeugen (Zermelo *1931*, Vorveröffentlichung Zermelo *1930b*), angeregt, wie er in einem Bericht an die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft schreibt,[20] „durch die Weltfahrt des ‚Grafen Zeppelin‘ “, die u. a. die Aufmerksamkeit des italienischen Mathematikers Tullio Levi-Civita erregte (Levi-Civita *1931*). Richard von Mises, der schon 1918 mit seiner *Fluglehre* (v. Mises *1918*) das Standardwerk auf diesem Gebiet vorgelegt hatte, beurteilt Zermelos Leistung wie folgt (v. Mises *1931*, 373):

> Herr E. *Zermelo* hat als erster die Aufgabe gestellt und gelöst, die für die praktische Luftfahrt nicht ganz ohne Interesse sein kann: Wie sehen die Bahnkurven aus, auf denen ein Luftfahrzeug mit konstanter Eigengeschwindigkeit, bei veränderlicher Windstärke, *in kürzester Zeit* von einem Punkt zum anderen gelangt.

[19] UA Freiburg C 129/140; Moore *1980*, 131.
[20] UA Freiburg, C 129/140.

Zermelos Interesse an den Anwendungen der Mathematik äußerte sich auch in Untersuchungen über Gegenstände wie „Straßenbau im Gebirge“, „Gummiball und Lampenschirm“ und „Wie zerbricht ein Stück Zucker“ — so jedenfalls die Themen eines Vortrages, den Zermelo am 19. Juli 1941 in der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen hielt.[21] Zermelos Versuch, Arbeiten dieser Art in einem Band mit dem Titel *Mathematische Miniaturen. Eine Sammlung unterhaltender Aufgaben für Mathematiker und Freunde der Mathematik* zusammenzufassen, blieb ebenso unvollendet wie andere Buchprojekte, so daß die letzte Veröffentlichung Zermelos von 1935 stammt (Zermelo *1935*).

Im Nachlaß sind zudem Zermelos Bemühungen dokumentiert, eine Ausgabe seiner mathematischen Werke zu organisieren, ein Plan, den er schon seit 1912 verfolgt hatte. Auf ein entsprechendes Angebot an den Springer-Verlag erhielt er im März 1949 die Antwort, daß man darüber vor langen Jahren schon einmal gesprochen habe. Damals sei die Sache durchführbar gewesen, in der heutigen Situation (des Jahres 1949) nicht.[22]

4 Becker über Zermelos Mengenlehre

4.1 *Mathematische Existenz*

In Beckers 1927 veröffentlichtem mathematikhistorischen Hauptwerk *Mathematische Existenz* (Becker *1927*) finden sich nur wenige Bezüge auf Zermelo. Das ist durchaus verständlich, denn zu lange lagen Zermelos grundlegende Arbeiten zur Mengenlehre zurück. In den von Becker reflektierten Grundlagenstreit der Mathematik hatte sich Zermelo bis 1927 nicht eingemischt. Seine Anwendung der axiomatischen Methode auf die Mengenlehre wird von Becker schlicht erwähnt (Becker *1927*, 6). In dem von Becker gebrauchten Eponym „Cantor-Zermelosche Mengenlehre“ (14) wird deutlich, daß er Zermelo mit Cantor zusammen an den Beginn der Entwicklung stellt, die auf die Mengenlehre seiner Zeit geführt hat. Das Zermelosche Auswahlaxiom wird erläutert (19, Anm. 1), und es wird erwähnt, daß es aus Hilberts transfinitem Axiom gefolgert werden kann (18*f*.). Im Zusammenhang mit diesem Axiom Hilberts wird gezeigt, daß mit Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes natürlich nicht tatsächlich eine Konstruktion für die Wohlordnung des Kontinuums vorgelegt wurde (21, Anm. 1). Becker erwähnt summarisch Zermelos Versuch, die Russellsche Antinomie durch geeignete Definition des Mengenbegriffs zu vermeiden (117). In seinen historischen Bemerkungen stellt er fest, daß mit der Cantorschen Mengenlehre die Scheu vor dem Aktual-Unendlichen verschwunden sei, aus Nominaldefinitionen seien existenzsetzende Realdefinitio-

[21] Einladungszettel, UA Freiburg, C 129/129.

[22] Schreiben des Springer-Verlages vom 14.3.1949, UA Freiburg, C 129/136.

nen geworden. Damit wären aber auch die antiken konstruktiven Definitionen obsolet geworden. „Es bleibt vielleicht die Möglichkeit", so schreibt er, „die in gewisser Hinsicht so naive Auffassung der aktual unendlichen Mengen als ‚mit einem Schlage gegebener' als eine *Rückkehr zum primitiven ‚Gestalten-Sehen' der archaischen Mathematik* [...] auszulegen" (159). Als belegendes Beispiel dient ihm Zermelos Ersetzung der „sukzessiven" Auswahl unendlich vieler Elemente durch ihre „gleichzeitige" Auswahl beim Beweis des Wohlordnungsatzes (159, Anm. 2). Becker geht auf Vorschläge von Lebesgue zum Zermeloschen Beweis des Wohlordnungssatzes ein, meint dann aber, daß man für den Beweis der Wohlordnung keineswegs das Zermelosche System zugrundelegen müsse (175, Anm. 1).

Dies ist die (wie ich hoffe) vollständige Liste von Erwähnungen Zermelos in *Mathematische Existenz*. Seine Arbeiten zur Mengenlehre kommen nur am Rande vor, durchaus verständlich, da sie inzwischen schon historisch waren.

4.2 Briefwechsel

Im Nachlaß von Zermelo finden sich jedoch zwei Stücke eines Briefwechsels zwischen Becker und Zermelo,[23] die auf einen intensiveren wissenschaftlichen Austausch schließen lassen. In einer aus Bonn geschickten Postkarte vom 18. Juli 1936 bittet Becker Zermelo um Zusendung eines Sonderdrucks der Grenzzahlen-Arbeit (Zermelo *1930a*), der beim Umzug nach Bonn verlorengegangen sei: „Da mir aber gerade diese Abhandlung von Ihnen sehr wertvoll ist, wäre ich glücklich, wieder in Besitz eines Exemplars zu kommen." Es ist genau diese Arbeit, die auch Gegenstand eines ausführlichen Briefes vom Sylvestertag des Jahres 1930 ist. Auf den letztgenannten Brief möchte ich nun noch eingehen.

Bei der „Grenzzahlen-Arbeit" handelt es sich um den Aufsatz „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", erschienen in der polnischen Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae* (Zermelo *1930a*), den Zermelo einige Zeit nach seiner Reise nach Polen schrieb, die ihn im Mai und Juni 1929 u. a. nach Warschau, Krakau und Lwów (Lemberg) geführt hatte.[24]

Es wäre wohl erstaunlich gewesen, hätte es im Vorfeld nicht Konflikte in Freiburg gegeben. Der Freiburger Altordinarius Lothar Heffter bemerkte am 7. März 1929 indigniert,[25] daß er nur über Umwege erfahren habe, daß Zermelo die von ihm angekündigte Vorlesung über Differentialgeometrie nicht zu halten gedenke. Er bittet ihn um Aufklärung und betont, daß das Programm

[23] UA Freiburg, C 129/7.

[24] Vgl. den Bericht Zermelos an die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft vom 2. Dezember 1929, UA Freiburg, C 129/140).

[25] Heffter an Zermelo, dat. Freiburg i. Br., 7. März 1929, UA Freiburg, C 129/42.

für das jeweils nächste Semester stets in kollegialer Besprechung festgesetzt werde. „Eine notwendige Folge des kollegialen Zustandekommens des Programms scheint mir aber zu sein, dass, wenn einer von uns ohne Not seine Ankündigung zu ändern wünscht, er sich darüber zunächst mit den Kollegen verständigt.“ In seinem scharfen Antwortbrief vom 13. März 1929[26] verbittet sich Zermelo von Heffter jegliche „amtlichen Vorhaltungen“ bezüglich seiner Lehrtätigkeit. Dafür sei der Dekan zuständig, der die Absage aber einfach zur Kenntnis genommen habe. Er stellt richtig fest: „Für den mathematischen Gesamtunterricht kann ich als nichtbeamteter Dozent ohne Lehrauftrag in keiner Weise verantwortlich gemacht werden.“ Es folgt in weiteren Briefen ein eher peinlicher Schlagabtausch, der wie vorgezeichnet ausgeht: Zermelo fährt nach Polen, und die Freiburger hätten für Ersatz sorgen sollen.

In einem Brief an den Warschauer Mathematiker Władisław Sierpiński charakterisiert Zermelo die Grenzzahlen-Arbeit wie folgt:[27] Ihr Gegenstand betreffe die Grundlagen der Mengenlehre und verspreche

> eine befriedigende Aufklärung der sogenannten Antinomien [...]. Es handelt sich um die Untersuchung solcher „Mengenbereiche“, in denen die allgemeinen Axiome der Mengenlehre erfüllt sind und um die systematische Entwickelung der wesentlich verschiedenen (unter sich nicht isomorphen) „Modelle“, die zu ihrer Repräsentation dienen können.

In der Grenzzahlen-Arbeit schlägt Zermelo eine Axiomatisierung der Mengenlehre vor, die er selbst „*ZF*-System“ für „Zermelo-Fraenkelsches System“ nennt[28] und die er um das Fundierungsaxiom zum „ergänzten *ZF*-System“ ZF' erweitert, zugleich aber um das Unendlichkeitsaxiom reduziert. Sie kann, wenn man so will, als eine verspätete (und wohl auch zunächst unbewußte) Gegenschrift zur Kritik von Thoralf Skolem an Zermelos erster Axiomatisierung der Mengenlehre (Skolem *1923*) verstanden werden.[29] Diese Kritik betraf insbesondere das Aussonderungsaxiom, nach dem es für eine definite Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ für eine Menge M eine Untermenge N von M gibt, die diejenigen Elemente x von M enthält, für die $\mathfrak{E}(x)$ wahr ist (Zermelo

[26] Zermelo an Heffter, dat. Freiburg i. Br. 13. März 1929, ebd.

[27] Zermelo an Sierpiński, dat. Freiburg, 26.3.1930, UA Freiburg, C 129/100. Zur Grenzzahlen-Arbeit vgl. Michael Halletts Einleitung (Hallett *1996*) zur englischen Übersetzung des Aufsatzes (Zermelo *1996*), Lavine *1994*, 134–141, sowie (auch zum historischen Kontext) Moore 1980, 120–130, Moore *1987*, 125–128, Kanamori *1996*, 26–29, und Ebbinghaus *2002*.

[28] Heute wird das System „ZFC“ genannt (mit „C“ für “[axiom of] choice”, da das Auswahlaxiom „als allgemeines logisches Prinzip“ vorausgesetzt wird, s. Zermelo *1930*, 31).

[29] Zum Verhältnis zwischen Skolem und Zermelo, insbesondere auch zur Chronologie von Zermelos Reaktionen auf den „Skolemismus“ siehe van Dalen/Ebbinghaus *2000*, Ebbinghaus *2002*.

1908b). Der in der Formulierung verwendete Begriff der Definitheit gerät in der Folge ins Schußfeld, denn er war von Zermelo eher informell eingeführt worden. Danach heißt eine Aussage „definit", wenn über ihre Gültigkeit oder Ungültigkeit „ohne Willkür" mit Hilfe „der allgemeingültigen logischen Gesetze" entschieden werden kann (Zermelo *1908b*, 262). Skolem (Skolem *1923*) schärfte Zermelos vagen Bezug auf die „allgemeingültigen logischen Gesetze", indem er die Zermelosche Mengenlehre in einer Sprache der ersten Stufe darstellte und damit zeigte, daß der Satz von Löwenheim-Skolem auch auf die Zermelosche Mengenlehre zutrifft. Dieser Satz besagt, daß jede finite oder abzählbar unendliche Menge von Sätzen der Logik erster Stufe, die ein Modell hat, auch ein abzählbares Model hat.

Den Begriff der Definitheit hatte Zermelo selbst ohne Kenntnis der Skolemschen Arbeiten 1929 näher bestimmt (Zermelo *1929*), er war aber von Skolem sogleich gekontert worden (Skolem *1930*).

Die Grenzzahlen-Arbeit gehört also in den Kontext dieses Kampfes Zermelos gegen den „Skolemismus",[30] der nicht nur gegen die Skolemsche Kritik gerichtet war, sondern gegen jede Form des Finitismus, sei es Brouwers Intuitionismus, Hilberts Metamathematik oder die Gödelschen Überlegungen. Solchen finitistischen Bestrebungen setzte Zermelo eine eher vage „Logik des Unendlichen" entgegen (vgl. Zermelo *1932a, b*), mit der er der „Unzulänglichkeit *jeder* ‚finitistischen' Beweistheorie" zu begegnen versuchte (Zermelo *1932a*, 87).

In der Grenzzahlen-Arbeit beschreibt Zermelo die Abfolge der Modelle der Mengenlehre, wobei diese Modelle durch das die Elementrelation stützende Fundierungsaxiom in einer kumulativen Hierarchie geschichtet sind. Die Zermelosche kumulative Hierarchie entspricht damit der v. Neumannschen Hierarchie (Kanamori *1996*, 27). Die Stufen dieser Hierarchie werden induktiv über die schrittweise Ausführung der Potenzmengenbildung erzeugt.[31] Zermelo beginnt mit einer beliebigen Menge V_0 von Urelementen, also Objekten, die selbst keine Mengen sind, von der er dann nacheinander die iterierten Potenzmengen bildet:

$$V_1 = \mathcal{P}(V_0),\ V_2 = \mathcal{P}(V_1),\ \dots\ , V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)\ .$$

An Limeszahlen V_β bildet er die Vereinigung aller vorhergehenden Potenzmengen:

$$V_\beta = \bigcup\{V_\alpha \alpha < \beta\}\ .$$

Die Hierarchie ist insofern kumulativ als V_α für alle Ordinalzahlen α und β mit $\alpha < \beta$ Teilmenge von V_β ist. Zermelo zeigt nun, daß jedes Modell von

[30] Der Terminus findet sich in Zermelo *1932*, 85.

[31] Die Darstellung folgt Ebbinghaus *2002*, 3.

ZF' mit einem Anfangssegment der v.-Neumann-Hierarchie zusammenfällt und daß eine Stufe V_α genau dann ein Modell von ZF' ist, wenn α der ersten transfiniten Ordnungszahl ω gleich ist (falls die Negation des Unendlichkeitsaxioms gilt) oder wenn α eine stark unerreichbare Kardinalzahl ist, d. h. wenn gilt, daß (1) α überabzählbar ist, (2) α regulär ist, also keine unbegrenzte Untermenge eines Ordnungstypus kleiner α enthält und (3) wenn für jede Kardinalzahl $\kappa < \alpha$ gilt: $2^\kappa < \alpha$.

Bei den Potenzmengenbildungen zur Konstruktion seiner Mengenhierarchien geht Zermelo stets von vollen Potenzmengen aus. Es ist genau dieses Vorgehen, das Becker in seinem Brief kritisiert. Geschrieben ist der Brief am 31. Dezember 1930. Becker nimmt darin Bezug auf eine Unterhaltung am Vortag über, wie er sagt, „1) die Frage der Mächtigkeit des Kontinuums etc. in Ihrem System 2) die Frage der Unerschöpflichkeit der Zahlenreihe.“

„Sie sagten mir,“ so hebt er an,

> in Ihrem System sei die Frage der Mächtigkeit von 2^m an sich entschieden, wenn auch leider ungelöst. Und zwar deshalb, weil das Ax.-System in jedem abgeschlossenen Bereich kategorisch sei.

Dagegen habe er doch erhebliche Zweifel, weil öfter vom Begriff aller Untermengen einer Menge Gebrauch gemacht werde, der möglicherweise *mehrfach* und vieldeutig sei. Becker argumentiert, daß man von verschieden großen Potenzmengen ausgehen kann, weil der Bereich der zulässigen Aussonderungsfunktionen $\mathfrak{f}$ nicht determiniert und die Kategorizität der Modelle also nicht sichergestellt sei.

Ich will mich einer weiteren Bewertung der Beckerschen Einwände hier enthalten und nur Heinz-Dieter Ebbinghaus zitieren, dem ich für die Unterstützung bei der Transkription des Briefes sehr dankbar bin. Ebbinghaus sagt zu Becker:[32] „Er hat mit seinen Einwänden völlig recht, auch [wenn] er das auf etwas ungewöhnliche Weise ausdrückt.“ Der Brief zeigt jedenfalls, daß Becker mit den neuesten Entwicklungen der mathematischen Grundlagenforschung wohl vertraut war und durchaus die Fähigkeit hatte, Anspruch und Realisierung in der Mengenlehre kritisch zu prüfen.

Brief Beckers an Zermelo vom 31.12.1930

Freiburg, den 31. 12. 30

Lieber Herr Zermelo!

Beifolgend schicke ich mit bestem Dank ihre „losen Blätter“ zurück, die freilich inhaltlich keineswegs lose sind. Die konstruktive Deutung der Entwicklungstheoreme der gedruckten Arbeit leuchtet mir durchaus ein; ebenso die Schlußbemerkungen.

[32] Telefonat mit dem Autor.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch kurz auf zwei Fragen zurückkommen, über die wir uns gestern unterhielten: 1) die Frage der Mächtigkeit des Kontinuums etc. in ihrem System 2) die Frage der Unerschöpflichkeit der Zahlenreihe. |[2]

1.

Sie sagten mir, in Ihrem Axiomensystem sei die Frage der Mächtigkeit von 2^m an sich entschieden, wenn auch leider ungelöst. Und zwar deshalb, weil das Ax.-System in jedem abgeschlossenen Bereich kategorisch sei. (Vgl. die Isomorphiesätze) — Ich habe dagegen doch erhebliche Zweifel. Denn mir scheinen die Argumentationen der Beweise der Isomorphiesätze etc. (S. 35–43 Ihrer Arbeit) öfters von dem Begriff *aller* Untermengen einer Menge Gebrauch zu machen, der möglicherweise *mehrfach* (vieldeutig) ist. (Vgl. Axiom A und E,[33] und Anm. 1 zu S. 30.) (Auf S. 50)[34]

Wenn der Umkreis der zugelassenen Satzfunktionen $\mathfrak{f}(x)$ eindeutig bestimmt ist, gelten ihre Argumente. Es könnte aber doch sein, daß man *verschiedene* vernünftige Gesichtspunkte |[3] für die Umgrenzung des Umkreises der zulässigen Satzfunktionen $\mathfrak{f}$ aufstellen kann. (Was ich im Grunde tatsächlich glaube).

Falls dies möglich wäre, so würde eine eindeutige Entscheidung der Frage, welche Mächtigkeit 2^m hat, auch bei festgelegter Basis und Charakteristik des Mengenbereichs nicht notwendig gelten. Denn im Eindeutigkeitsbeweis (Isomorphiebeweis) ist die Eindeutigkeit der Definition der Potenzmenge immer schon vorausgesetzt (aus Axiom U[35] und A).

Ich meine also: Isomorphie (Kategorizität) von Normalbereichen im Sinne des § 4 (S. 40–43) gilt nur unter der stillschweigenden (bzw. in Anm. 1 zu S. 30 angedeuteten) *Voraussetzung* der eindeutigen Bestimmtheit des Umkreises der Aussonderungs(Satz)-funktionen $\mathfrak{f}$, die die Untermengen einer gegebenen Menge erzeugen. Falls mehrere verschiedene Bestimmungen jenes Umkreises möglich sind (nicht auf Widersprüche führen)[,] gilt die Isomorphie zwischen 2 Normalbereichen mit (1) gleicher Charakteristik (2) äquivalenten Höhen (3) gleichem Umkreis der Auss.-Funktion $\mathfrak{f}$. |[4]

Ich meine nun weiter, daß die Mächtigkeit von 2^m (insbes. auch die von $2^{\aleph_0}$) von deren Umkreis der zugelassenen Untermengen abhängt. In Ihrem System wirkt sich dies dann so aus, daß (vgl. S. 33) die Grenzzahlen der Normalbereiche u. Umständen variieren. Wenn $2^{\aleph_0}$ unter der ersten exorbitanten Zahl liegt,[36] ist die erste exorbitante Zahl (*Mahlos* $\pi_{1,0}$) $= \pi_1$ der

[33] Axiom A: Axiom der Aussonderung; Axiom E: Axiom der Ersetzung.
[34] Es ist nicht klar, worauf dieser letzte Ausdruck verweist.
[35] Axiom U: Axiom der Potenzmengen.
[36] Der Terminus „exorbitante Zahl“ geht auf Felix Hausdorff zurück (*1914*, 131). Exor-

ersten „Grenzzahl". Sonst ist sie größer ($\pi_1 > \pi_{1,0}$).[37] Man kann nun, im Anschluß an die „Betrachtungen" auf S. 33–35, untersuchen, welche exorbitanten Zahlen die „Bedingung II" für die Grenzzahlen (S. 34 unten)[38] erfüllen *unter den* verschiedenen möglichen Vorraussetzungen über die Mächtigkeit von 2^m, die wiederum auf die verschieden mögl. Voraussetzungen über den Umkreis der zugelassenen Satzfunktionen $\mathfrak{f}(x)$, die die Untermengen erzeugen, zurückzuführen sind. —

Wenn das Vorige stimmt (d. h. nicht auf Widersprüche führt), so käme man auf noch eine dritte „Dimension" eines „Modelltypus" (S. 42),[39] außer „Breite" und „Höhe" hätte man auch den „Reichtum" an Untermengen, gewissermaßen den „Grad der Spaltbarkeit von Mengen" [.] |[5]

Ich sehe nicht ein, warum man das nicht auch noch zulassen soll. Allerdings ist eben heute noch unbekannt, wie man den Umkreis von $\mathfrak{f}$-Satzfunktionen bestimmen muß, damit eine bestimmte Mächtigkeit 2^m herauskommt.* [Fußnote *: „Weiter ist natürlich nicht *jede* Variation der Mächtigkeit von 2^m wirksam, sondern nur eine genügend große (wenigstens eine exorbitante Zahl überschreitende)."] Aber das ist doch ein vielleicht lösbares Problem. Jedenfalls hätte man nun in meiner Auffassung Platz für dieses Problem und auch Platz für die mir sehr wahrscheinliche Möglichkeit, daß die Mächtigkeit des Kontinuums *nicht* durch Ihre Axiome festgelegt ist. —

2.

Die beste Formulierung für die Unerschöpflichkeit der Zahlenreihe scheint mir von Ihnen auf S. 45–46 gegeben. Der erhebliche Fortschritt über *Mahlo* hinaus ist *der*, daß *Mahlo* einfach *nach* allen singulären Anfangszahlen mit Limeszahlindex |[6] eine kleinste reguläre Anf[angszahl] mit L[imes-]Z[ahl-]Index

---

bitante Zahlen werden heute „schwach unerreichbare Zahlen" genannt.

[37] Friedrich Paul Mahlo hat sich in der Mengenlehre großer Kardinalzahlen mit den Mahlo-Zahlen verewigt. Mahlo (* 28.7.1883 in Koswig/Anhalt, † 20.8.1971 in Halle a. S.) hatte zwischen 1902 und 1909 in Jena, Greifswald, Göttingen, München und Halle studiert und 1908 bei Felix Bernstein in Halle promoviert. 1911 ging er in den Schuldienst, war Studienassessor zunächst in Bochum, dann in Recklinghausen, bevor er 1929, immer noch als Studienassessor, an das Luther-Pädagogium Mansfeld ging. 1933 wurde er amtsenthoben. Mahlo entwickelte seine Theorie der später so genannten „Mahlo-Zahlen" vor allem in den Arbeiten Mahlo *1911*, *1912*, *1913*. Zu Mahlo vgl. Gottwald/Kreiser *1984*. Für das genannte $\pi_{1,0}$ vgl. die Definition bei Mahlo *1911*, 193, sowie die Abzählung der regulären Anfangszahlen der Größe nach mit $\pi_{1,0} = \omega$ als der zweitgrößten Anfangszahl nach $\pi_{0,0} = 0$, ebd., 192.

[38] „Jede ‚Grenzzahl' oder ‚Charakteristik' eines Normalbereichs ist gleichzeitig ein ‚Eigenwert' oder ‚kritische Zahl' unserer oben definierten Normalfunktion $\Psi(\xi)$" (Zermelo *1930*, 34).

[39] Unter „Modelltypus" versteht Zermelo die „Struktur" eines Normalbereiches, also alles das, war er mit allen isomorphen Bereichen gemeinsam hat.

(= exorbitante Zahl) *ansetzt*, — während diese (im Falle des Einheitsbereichs und der engsten Spaltbarkeitsannahme $2^{\aleph_m} = \aleph_{m+1}$) bei Ihnen als Ordnungstyp der Gesamtheit aller im Cantor'schen Beweis vorkommenden Grundfolgen erscheint.

Ich meine, daß man diese Überlegung nicht verbessert, wenn man nach dem Schlußschema von den „veilchenduftenden Ordnungszahlen" argumentiert. Denn dies tut eigentlich schon *Mahlo* (wenn er damit auch nur die „Möglichkeit der Existenz" beweisen will, also eigentlich endgültig gar nichts) und darin liegt m. E. gerade seine *Unterlegenheit* Ihnen gegenüber. Ich finde also, Sie sollten es bei der Überlegung auf S. 46 bewenden lassen.[40]

Mir scheint das Prinzip, jeden kategorischen Bereich auch als Menge auffassen zu können, viel durchsichtiger und befriedigender, als das Prinzip, es gäbe schließlich O[rdnungs]-Z[ahlen] mit der |[7] Eigenschaft $\mathfrak{E}$, sofern nur diese Eigenschaft $\mathfrak{E}$ nicht dem Wesen der O.-Z. widerspricht. Schließlich ist es freilich vielleicht Geschmackssache oder „Weltanschauungsangelegenheit". Ihr Prinzip hat etwas Mystisches, es liegt darin der Glaube, daß sich im Himmel des genügend weit draussen liegenden Teils der O.-Z.-Reihe [...] schließlich alle Wünsche der Mathematiker erfüllen, die nicht gerade wesenhaft unmöglich (widersinnig) sind.

Schließlich ist das am Sylvester ein ganz hübscher Gedanke. —

Womit ich Ihnen, zugleich im Namen meiner Frau, recht herzlich ein glückliches Neues Jahr wünsche!

Ihr sehr ergebener Oskar Becker.

Literaturverzeichnis

Becker, Oskar *1927* „Mathematische Existenz. Zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene", *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* **8**, 441–809; auch separat, 2. Aufl., Max Niemeyer: Tübingen 1973.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter *2002 The Cumulative Hierarchy*, unveröffentlichtes TS, April 2002.

Ewald, Ewald (Hg.) *1996 From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Bd. 2, Clarendon Press: Oxford.

Fraenkel, Abraham A. *1967 Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers*, Deutsche Verlagsanstalt: Stuttgart.

Gericke, Helmut *1955 Zur Geschichte der Mathematik an der Universität Freiburg i. Br.*, Albert: Freiburg i. Br. (*Beiträge zur Freiburger Wissenschafts- und Universitätsgeschichte*; 7).

[40] Zermelo diskutiert dort die Konsequenzen der allgemeinen Hypothese, „daß *jeder kategorisch bestimmte Bereich irgendwie als ‚Menge' aufgefaßt werden* [...] kann."

GOTTWALD, Siegfried/KREISER, Lothar *1984* „Paul Mahlo: Leben und Werk“, *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* **21**, H. 2, 1–22.

HALLETT, Michael *1996* “Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)”, in Ewald (Hg.) *1996*, 1208–1218.

HAUSDORFF, Felix *1914 Grundzüge der Mengenlehre*, De Gruyter: Berlin/Leipzig. Repr. Chelsea: New York 1965.

HILBERT, David *1900* „Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900“, *Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*, 253–297.

— *1931* „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre“, *Mathematische Annalen* **104**, 485–494.

KANAMORI, Akihiro *1996* “The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen”, *The Bulletin of Symbolic Logic* **2**, 1–71.

LAVINE, Shaughan *1994 Understanding the Infinite*, Harvard University Press: Cambridge, Mass./London.

LEVI-CIVITA, Tullio *1931* „Über Zermelo’s Luftfahrtproblem“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **11**, 314–322.

MAHLO, Paul *1911* „Über lineare transfinite Mengen“, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse* [*Leipziger Berichte*] **63**, 187–225.

— *1912* „Zur Theorie und Anwendung der ϱ_0-Zahlen“, *Leipziger Berichte* **64**, 108–112.

— *1913* „Zur Theorie und Anwendung der ϱ_0-Zahlen. II“, *Leipziger Berichte* **65**, 268–282.

VON MISES, Richard *1918 Fluglehre. Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung*, Springer: Berlin 1918, ^{5}1936, Neubearbeitung von Kurt Hohenemser als ^{6}1957.

— *1931* „Zum Navigationsproblem der Luftfahrt“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **11**, 373–381.

MOORE, Gregory H. *1980* “Beyond First-order Logic: The Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set-theory”, *History and Philosophy of Logic* **1**, 95–137.

— *1982 Zermelo’s Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence*, Springer: New York/Heidelberg/Berlin (*Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*; 8).

— *1987* “A House Divided Against Itself: the Emergence of First-Order Logic as the Basis for Mathematics”, in: *Studies in the History of Mathematics*, hg. v.

Esther R. Phillips, The Mathematical Association of America: o. O. (*Studies in Mathematics*; 26), 98–136.

Peckhaus, Volker *1990 Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*, Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen (*Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik*; 7).

— *1990b* „ ‚Ich habe mich wohl gehütet, alle Patronen auf einmal zu verschießen.‘ Ernst Zermelo in Göttingen“, *History and Philosophy of Logic* **11**, 19–58.

— *1992* „Hilbert, Zermelo und die Institutionalisierung der mathematischen Logik in Deutschland“, *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* **15**, 27–38.

— *1993* „Kurt Grelling und der Logische Empirismus“, in: *Wien–Berlin–Prag. Der Aufstieg der wissenschaftlichen Philosophie. Zentenarien Rudolf Carnap–Hans Reichenbach–Edgar Zilsel*, hg. v. Rudolf Haller/Friedrich Stadler, Hölder-Pichler-Tempsky: Wien (*Veröffentlichungen des Instituts Wiener Kreis*; 2), 362–385.

— *1994* „Von Nelson zu Reichenbach. Kurt Grelling in Göttingen und Berlin“, in: *Hans Reichenbach und die Berliner Gruppe*, hg. v. Lutz Danneberg/Andreas Kamlah/Lothar Schäfer, Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig/Wiesbaden, 53–86.

— *1997* „Formalistische Taschenspielertricks? Frege und Hankel“, in: *Frege in Jena. Beiträge zur Spurensicherung*, hg. v. Gottfried Gabriel/Wolfgang Kienzler, Königshausen & Neumann: Würzburg 1997 (*Kritisches Jahrbuch der Philosophie*, Bd. 2), 111–122.

— *1997/2001* „Zermelo in Zürich“, 1997, Version 2001, `http:\\www-fakkw.upb.de\institute\philosophie\Personal\Peckhaus\Texte_zum_Download\zermzuri.pdf`.

— *in diesem Band* „Impliziert Widerspruchsfreiheit Existenz? Beckers Kritik am formalistischen Existenzbegriff“.

Skolem, Thoralf *1923* „Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre“, *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922. Den femte skandinaviska mathematiker kongressen. Redogörelse*, Akademiska Bokhandeln: Helsinki, 217–232.

— *1930* „Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo: ‚Über die Definitheit in der Axiomatik‘“, *Fundamenta mathematicae* **15**, 337–341.

Thiel, Christian *1995 Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt (*Wissenschaft im 20. Jahrhundert. Transdisziplinäre Reflexionen*)

van Dalen, Dirk/Ebbinghaus, Heinz-Dieter *2000* “Zermelo and the Skolem Paradox”, *Bulletin of Symbolic Logic* **6**, 145–161.

ZERMELO, Ernst *1896a* „Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie“, *Annalen der Physik und Chemie* N.F. [Wiedemann’s Annalen] **57**, 485–494.

— *1896b* „Ueber mechanische Erklärungen irreversibler Vorgänge. Eine Antwort auf Hrn. Boltzmann’s ‚Entgegnung‘ “, *Annalen der Physik und Chemie* N.F. **59**, 793–801.

— *1904* „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)“, *Mathematische Annalen* **59**, 514–516.

— *1908a* „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I“, *Mathematische Annalen* **65**, 261–281.

— *1908b Mathematische Logik*, Vorlesung gehalten in Göttingen im Sommersemester 1908, Ausarbeitung von Kurt Grelling, Nachlaß Zermelo, UA Freiburg, Tl. 1: C 129/224, Tl. 2: C 129/215.

— *1913* „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels“, in: E. W. Hobson/A. E. H. Love (Hgg.), *Proceedings of the 5th International Congress of Mathematics Cambridge 1912*, Cambridge University Press: Cambridge, Bd. 2, 501–504.

— *1929* „Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik“, *Fundamenta mathematicae* **14**, 339–344.

— *1930b* „Über die Navigation in der Luft als Problem der Variationsrechnung“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **39**, 2. Abt., 44–48.

— *1930c* „Aus Homers Odyssee. V 149–225“, *Wiener Blätter für die Freunde der Antike* **6** (1929/1930), Nr. 4 (Januar 1930), 93–94.

— *1931* „Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **11**, 114–124.

— *1932a* „Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2. Abt., **41**, 85–88.

— *1932b* „Ueber mathematische Systeme und die Logik des Unendlichen“, *Forschungen und Fortschritte* **8**, Nr. 1 v. 1. Jan. 1932, 6–7.

— *1935* „Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme (erste Mitteilung)“, *Fundamenta mathematicae* **25**, 136–146.

— *1996* “On Boundary Numbers and Domains of Sets: New Investigations in the Foundations of Set Theory”, in: Ewald (Hg.) *1996*, 1219–1233.